Запропоновано технологоію прогнозування часового ряду, який описано вейвлет-апроксимацією. Обчислювальну процедуру засновано на незалежному прогнозуванні компонентів розкладання вейвлет-апроксимації.

Ключові слова: *вейвлет-апроксимація, прогнозування часового ряду.*

Предложена технология прогнозирования временного ряда, описанного вейвлет-аппроксимацией. Вычислительная процедура основана на независимом прогнозировании компонентов разложения вейвлет-аппроксимации.

Ключевые слова: *вейвлет-аппроксимация, прогнозирование временного ряда.*

Technology of prediction of time series, described wavelet-approximation, is offered. Calculable procedure is based on independent prediction of components of decomposition of wavelet-approximation.

Keywords: *wavelet-approximation, prediction of time series.*

УДК 519.6

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВЕЙВЛЕТ-АППРОКСИМАЦИИ ВРЕМЕННОГО РЯДА

О. В. Серая
Кандидат технических наук, доцент
Кафедра компьютерного мониторинга и логистики
Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»
ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, Украина, 61002
Контактный тел.: (057) 707-66-28
E-mail: Seraya@kpi.kharkov.ua

1. Введение

При решении многочисленных проблем в технике, экономике, социологии, медицине и т. д. возникает однотипная задача описания и прогнозирования временного ряда, образованного совокупностью наблюдений соответствующего случайного процесса. Эта задача решается с использованием полиномиальных аппроксимаций или путем разложения в ряд по системе специальным образом выбираемых координатных (базисных) функций. В зависимости от характера наблюдаемого процесса в качестве базисных функций выбирают либо ортогональные многочлены (Эрмита, Лагерра, Чебышева и т. п.), либо систему гармонических колебаний (ряд Фурье). Нужно отметить, что эти подходы не обеспечивают надлежащую точность аппроксимации для описания процессов с локальными особенностями, что является следствием конструктивных недостатков самих этих подходов. К их числу относятся [1]:

- практически неизбежное ограничение числа базисных функций приводит к ошибкам при восстановлении процесса;
- базисные функции определены на всей оси и их параметры не меняются во времени;
- отдельные (локальные) особенности наблюдаемого процесса вызывают изменения частотного образа процесса, которые «размазываются» по всей частотной оси, что делает их обнаружение по спектру сигнала практически невозможным;
- плавный характер базисных функций затрудняет представление локальных пиков, разрывов процесса, что приводит к необходимости использования в его представлении функций высокого порядка, которые влияют на форму восстановленного сигнала и за пределами локальных особенностей процесса;
- по составу высших составляющих спектра практически невозможно оценить местоположение особенностей;
- при наличии локальных особенностей процесса его спектр содержит компоненты высокого порядка, амплитуда которых мала, в силу чего они могут быть при анализе не замечены и отброшены.

Таким образом, известные методы представления реальных случайных процессов наталкиваются на серьезные теоретические ограничения, не позволяющие осуществить адекватное их математическое описание.

Серьезной альтернативой традиционному подходу является вейвлет-аппроксимация, которая теоретически позволяет приблизить любую функцию, в том числе состоящую из разных нестационарных компонент, действующих в разные промежутки времени, содержащую пики, разрывы и другие особенности [2—3].

Основополагающая идея вейвлет-представления функций заключается в разбиении приближения к наблюдаемому процессу на две составляющие — аппроксимирующую (грубую) и детализирующую с их последующим итерационным уточнением.

Задача аппроксимации наблюдаемого процесса решается с использованием системы функций, получаемых из так называемой порождающей функции с помощью целочисленных сдвигов. Принципиальное свойство, которым должна обладать порождающая функция состоит в следующем: для порождающей функции $\varphi(x)$ система функций $\varphi(x-n)$, $n \in Z$, образует ортонормированный базис [2].

С использованием масштабируемого сдвига получим новую систему функций:

$$\varphi_{j,n}(x)=\sqrt{2^j}\varphi(2^j x-n), \quad j=1,2...$$

Легко показать, что система функций $\varphi_{j,n}(x)$ также образует ортонормированный базис.

Совокупность систем функций $\varphi_{j,n}(x)$, $j \in N$, может быть использована для описания произвольной функции $f(x)$ путем ее разложения по элементам ортогонального базиса $\varphi_{j,n}(x)$ с применением операторов ортогонального проектирования. Разложение $f(x)$ имеет стандартный вид:

$$P_j(f(x)) = \sum_{n\in Z}(f(x),\varphi_{j,n}(x))\varphi_{j,n}(x),\quad j=0,1,2,...$$

Здесь

$$(f(x),\varphi_{j,n}(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_{j,n}(x)dx = \sqrt{2^j}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(2^j x - n)dx.$$

При этом, если j = 0, то

$$(f(x),\varphi_{0,n}(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x-n)dx = \int_{n}^{n+1} f(x)dx = f_{0n}$$

есть среднее значение функции $f(x)$ на промежутке $[n, n+1)$. Тогда

$$P_0(f(x)) = \sum_{n\in z}(f(x),\varphi_{0,n}(x))\varphi_{0,n}(x) = \sum_{n\in z} f_{0n}\varphi(x-n) \qquad (1)$$

это кусочно-постоянная функция, принимающая значение f_{0n} на промежутке $[n,n+1)$, приближенно описывающая $f(x)$.

Если теперь $j=1$, то

$$(f(x),\varphi_{1,n}(x)) = \sqrt{2}\int_{\frac{n}{2}}^{\frac{n+1}{2}} f(x)dx =$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{n+1}{2}-\frac{n}{2}\right)\frac{1}{\frac{n+1}{2}-\frac{n}{2}}\int_{\frac{n}{2}}^{\frac{n+1}{2}} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2}}f_{1n},$$

где f_{1n} есть среднее значение функции $f(x)$ на промежутке $\left[\frac{n}{2},\frac{n+1}{2}\right)$.

Тогда

$$P_1(f(x)) = \sum_{n\in z}(f(x),\varphi_{1,n}(x))\varphi_{1,n}(x) =$$

$$= \sum_{n\in z}\frac{1}{\sqrt{2}}f_{1n}\sqrt{2}\varphi(2x-n) = \sum_{n\in z} f_{1n}\varphi(2x-n)$$

это кусочно-постоянная функция, принимающая значение f_{1n} на промежутке $\left[\frac{n}{2},\frac{n+1}{2}\right)$, более точно описывающая $f(x)$, нежели (1).

Ясно, что с увеличением индекса оператора проектирования точность приближения функции возрастает. При этом более точное приближение $P_{j+1}(f(x))$ можно представить как сумму приближения $P_j(f(x))$ и дополнения — слагаемого $P_j^W(f(x))$, отражающего уточнение при переходе от $P_j(f(x))$ к $P_{j+1}(f(x))$, то есть

$$P_{j+1}(f(x)) = P_j(f(x)) + P_j^W(f(x)). \qquad (2)$$

Для получения аналитического представления уточняющего элемента разложения используется другой ортонормированный набор базисных функций — вейвлеты. Соответствующая порождающая функция $\psi(x)$ отыскивается по формуле [2—3]:

$$\psi(x) = \sqrt{2}\sum_n (-1)^n h_{N-n}\varphi(2x-n). \qquad (3)$$

Здесь $\{h_k\}$, $n\in Z$ — набор коэффициентов, отыскиваемых путем решения специальной системы уравнения [1—3].

Базисный набор вейвлетов формируется путем масштабированного сдвига порождающего вейвлета (3). Уточняющее разложение также имеет стандартный вид:

$$P_j^w(f(x)) = \sum_{n\in Z}(f(x),\psi_{j,n}(x))\psi_{j,n}(x),$$

где

$$(f(x),\psi_{j,n}(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x),\psi_{j,n}(x)dx =$$

$$= \sqrt{2^j}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi(2^j x - n)dx.$$

Введем разложение $f(x)$ на некотором уровне j_0:

$$P_{j_0}(f(x)) = \sum_{n\in Z}(f(x),\varphi_{j_0,n}(x))\varphi_{j_0,n}(x) =$$

$$= \sum_{n\in Z}\int_{-\infty}^{\infty}(f(x)\varphi_{j_0,n}(x)dx)\varphi_{j_0,n}(x) = \sum_{n\in Z} a_{j_0,n}\varphi_{j_0,n}(x).$$

Представим теперь разложение $P_{j_0}(f(x))$ как сумму приближения $P_{j_0-1}(f(x))$ и уточняющего дополнения $P_{j_0-1}(f(x))$:

$$P_{j_0}(f(x)) = \sum_{k\in Z} a_{j_0-1,k}\varphi_{j_0-1,k}(x) + \sum_{k\in Z} d_{j_0-1,k}\psi_{j_0-1,k}(x), \qquad (4)$$

где

$$a_{j_0-1,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_{j_0-1,k}(x)dx,$$

$$d_{j_0-1,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_{j_0-1,k}(x)dx.$$

Заметим, теперь, что сглаженную функцию $P_{j_0-1}(f(x))$ можно еще раз разложить на еще более сглаженную часть $P_{j_0-2}(f(x))$ и уточняющую ее часть $P_{j_0-1}^w(f(x))$.

Эту процедуру можно продолжить, получая все более сглаженную аппроксимацию функции $f(x)$ и совокупность ее уточнений.

2. Постановка задачи

Таким образом, последовательное применение процедуры получения разложения и уточняющего его дополнения позволяет аппроксимировать временной ряд с требуемой степенью точности. Соответствующая процедура может быть организована следующим образом.

1. Выбирается достаточно высокий уровень разложения j_0 такой, что аппроксимация $P_{j_0}(x)$ достаточно точно отражает функцию $f(x)$. На практике, поскольку функция $f(x)$ обычно задается массивом ее значений, то они и используются как начальное приближение $P_{j_0}(x)$.

2. Выполняется шаг разложения, на котором в соответствии с (4) получаем сглаженное описание $P_{j_0-1}(f(x))$ и детализирующую поправку к нему $P^W_{j_0-1}(f(x))$. Если коэффициенты $(d_{j_0-1,k})$ заметно отличны от нуля, то процедура уточнения продолжается.

В результате проведения этой процедуры, если глубина разложения оказалась равной N, будет получен аппроксимирующий набор $A_N = \{a_{j_0-N,k}\}$ и совокупность детализирующих наборов $D_N = \{d_{j_0-N,k}\}$, $D_{N-1} = \{d_{j_0-N+1,k}\}$, ..., $D_1 = \{d_{j_0-1,k}\}$.

Открытым остается вопрос относительно возможности прогнозирования процесса с использованием его вейвлет-разложения. Рассмотрим возможную процедуру решения этой задачи.

3. Основные результаты

Предлагается следующий подход к решению этой задачи, основанный на том обстоятельстве, что аппроксимирующая и детализирующие функции являются существенно более гладкими, нежели исходная функция. Пусть получены сглаженная аппроксимация функции $f(x)$ и совокупность уточняющих детализаций в виде соответствующих наборов $A_N, D_N, D_{N-1}, ..., D_1$. Каждый из этих наборов задает совокупность коэффициентов перед базисными функциями $\varphi_{j_0-N,k}(x)$ и вейвлетами $\psi_{j_0-s,k}(x)$, $s = 1,2,...,N$. Все эти коэффициенты в силу специфики вейвлет-анализа можно трактовать как отсчеты соответствующих функций, описывающих сглаженную и детализирующие части функции $f(x)$. Поэтому для каждой из них в отдельности может быть построена соответствующая аппроксимирующая модель, аналитическое описание которой легко получить методом наименьших квадратов.

Введем модель дискретно заданной функции $a_{j_0-N}(k)$, описывающей сглаженную часть $f(x)$:

$$a_{j_0-N}(k) = u_{j_0-N,0} + u_{j_0-N,1}k + ... + u_{j_0-N,s}k^s, \quad k \in Z. \qquad (5)$$

Аналогично этому введем модели функций, $d_{j_0-r}(k)$, $r = 1,2,...,N$, описывающих детализирующие составляющие $f(x)$:

$$d_{j_0-r}(k) = v_{j_0-r,0} + v_{j_0-r,1}k + ... + v_{j_0-r,N}k^s,$$
$$r = 1,2,...,N. \qquad (6)$$

Кроме того, зададим векторы

$$A_{j_0-N} = \begin{pmatrix} a_{j_0-N,1} \\ a_{j_0-N,2} \\ ... \\ a_{j_0-N,N} \end{pmatrix}, \quad D_{j_0-r} = \begin{pmatrix} d_{j_0-r,1} \\ d_{j_0-r,2} \\ ... \\ d_{j_0-r,N} \end{pmatrix}, \quad r = 1,2,...,N,$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{j_0-N,0} \\ u_{j_0-N,1} \\ ... \\ u_{j_0-N,s} \end{pmatrix}, \quad V_r = \begin{pmatrix} v_{j_0-r,0} \\ v_{j_0-r,1} \\ ... \\ v_{j_0-r,s} \end{pmatrix}, \quad r = 1,2,...,N,$$

и матрицу

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2^s \\ 1 & 3 & \dots & 3^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & N & \dots & N^s \end{pmatrix}.$$

Тогда функционалы наименьших квадратов для отыскания оценок векторов U, V_r, $r = 1,2,...,N$, имеют вид

$$J_U = (HU - A_{j_0-N})^T (HU - A_{j_0-N}),$$

$$J_{V_r} = (HV_r - D_{j_0-r})^T (HV_r - D_{j_0-r}), \quad r = 1,2,...,N,$$

откуда

$$\widehat{U} = (H^T H)^{-1} H^T A_{j_0-N}, \quad \widehat{V}_r = (H^T H)^{-1} H^T D_{j_0-r},$$

$$r = 1,2,...,N.$$

Теперь полученные описания функций (5), (6) могут быть использованы для независимого вычисления величины отсчетов значений сглаженной и детализирующих частей процесса на момент прогноза. Сумма этих отсчетов определяет искомое прогнозное значение функции $f(x)$.

4. Вывод

Таким образом, предложена вычислительная процедура прогнозирования временного ряда, описанного вейвлет-аппроксимацией, представляющей собой суперпозицию сглаженной и набора детализирующих составляющих. Предложенная технология основана на возможности независимого прогнозирования каждой составляющей вейвлет-аппроксимации процесса.

Литература

1. Серая О. В. Вейвлет-аппроксимация сложных процессов [Текст] / О. В. Серая, Т. А. Клименко // Математическое моделирование. — № 1(20). — Днепродзержинск : ДДТУ, 2009. — С. 15—18.
2. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам [Текст] / И. Добеши. — М. : РХД, 2001. — 189 с.
3. Мала С. Вэйвлеты в обработке сигналов [Текст] : пер. с англ. / С. Малла. — М. : Мир, 2005. — 671 с.